

# APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS EM MODELOS BIOLÓGICOS.

Tatiane Cardoso Batista, Renata Zotin Gomes de Oliveira. – Matemática - Matemática - Departamento de Matemática – Instituto de Geociências e Ciências Exatas – Campus de Rio Claro.

“Modelagem matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual”. [1] (pág. 24).

Modelos matemáticos que relacionam as variáveis através de suas variações discretas são formulados com equações de diferenças. Essas equações são mais apropriadas para modelar, por exemplo, o crescimento populacional entre gerações sucessivas, quando esse se dá em etapas discretas e não ocorre uma sobreposição de gerações da espécie analisada.

Durante o projeto, estudamos técnicas de modelagem matemática e alguns modelos clássicos de dinâmica populacional, economia, etc., utilizando equações de diferenças e equações diferenciais.

Apresentaremos aqui alguns destes modelos de dinâmica populacional envolvendo equações de diferenças (lineares e não-lineares). Dentre estes modelos, podemos citar: dinâmica de insetos, modelo logístico, modelo discreto de May, dentre outros. No caso dos modelos não lineares, uma análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio é realizada a fim de obter maiores informações sobre o comportamento do sistema.

Apresentamos a seguir algumas definições e resultados que serão usados no decorrer do texto.

**Definição 1:** Uma equação de diferenças de 1ª ordem é uma fórmula de recorrência do tipo:

$$y_{n+1} = f(y_n).$$

Um exemplo deste tipo de equação é  $y_{n+1} = ay_n$ . Se  $y(0) = y_0$ , a solução é dada por:

$$y_n = a^n y_0,$$

onde  $y_0$  é chamada de condição inicial.

**Definição 2:** Considere um sistema dinâmico de 1ª ordem  $y_{n+1} = f(y_n)$ . Um número é chamado de valor de equilíbrio ou ponto fixo do sistema dinâmico se:

$$y_{n+1} = y_n = y^* \quad \forall n,$$

ou seja,  $y_n = y^*$  é uma solução constante para o sistema dinâmico.

**Definição 3:** Suponha um sistema dinâmico de 1ª ordem com um valor de equilíbrio  $y^*$ . Esse valor de equilíbrio é chamado estável ou atrator se existir um número  $\varepsilon$ , único para cada sistema, tal que, quando:

$$|y_0 - y^*| < \varepsilon, \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = y^*.$$

Um valor de equilíbrio é instável ou repulsor se existir um número  $\varepsilon$ , tal que, quando:

$$0 < |y_0 - y^*| < \varepsilon, \text{ então } |y_{n+1} - y^*| > \varepsilon,$$

para algum, mas não necessariamente todos, valores de  $n$ .

O teorema a seguir estabelece a estabilidade ou não de um ponto de equilíbrio.

**Teorema 1:** Suponha  $y^*$  um valor de equilíbrio do sistema dinâmico  $y_{n+1} = f(y_n)$ .

O valor de equilíbrio  $y^*$  é estável ou atrator se:

$$|f'(y^*)| < 1,$$

e é instável ou repulsor se:

$$|f'(y^*)| > 1.$$

Se  $|f'(y^*)| = 1$ , o teste é inconclusivo. Neste caso, derivadas de ordem superior são necessárias para decidir sobre a estabilidade de  $y^*$ .

Apresentamos a seguir alguns modelos envolvendo equações de diferenças, tanto lineares, quanto não lineares.

### **Modelo 1:** População de Insetos. [2]

Insetos geralmente têm mais que um estágio no seu ciclo de vida desde o nascimento até a maturidade. O ciclo completo pode durar semanas, meses ou até anos. Porém, é conveniente usar uma única geração como unidade básica de tempo quando tentamos escrever um modelo para crescimento da população de insetos. Vários estágios no ciclo da vida podem ser representados por equações de diferenças. Muitas vezes, o sistema de equações se resume a uma única equação, na qual combinações de todos os parâmetros básicos aparecem.

Como um exemplo, considere a reprodução de afídeos numa árvore. Fêmeas adultas de afídeos produzem lesões nas folhas. Toda a prole de um único afídeo está contida em uma lesão. Alguma fração desses vão emergir e sobreviver à idade adulta. Embora geralmente a capacidade para reprodução e a probabilidade de sobreviver à idade adulta dependa da população, deixemos momentaneamente essas considerações e estudemos um modelo simples no qual todos os parâmetros são constantes.

Consideremos:

$a_n$  = número de afídeos fêmeas adultos na  $n$ -ésima geração

$p_n$  = número de descendentes na  $n$ -ésima geração

$m$  = fração de mortalidade dos jovens afídeos

$f$  = número de descendentes por afídeo fêmea

$r$  = razão de afídeos fêmeas pelo total de afídeos adultos.

Então, escrevemos equações para representar as populações de afídeos e usamos para obter o número de fêmeas adultas na  $n$ -ésima geração quando se tem inicialmente  $a_0$  fêmeas.

Se cada fêmea produz  $f$  descendentes, então:

$$p_{n+1} = f a_n.$$

Disso,  $(1 - m)$  sobrevivem à idade adulta, cedendo uma proporção final de  $r$  fêmeas. Então:

$$a_{n+1} = r(1 - m) p_{n+1}$$

e, em função de  $a_n$ , temos:

$$a_{n+1} = fr(1 - m) a_n$$

Para o caso em que  $f$ ,  $r$ ,  $m$  são constantes, teremos uma equação de diferenças linear de 1ª ordem cuja solução é dada por:

$$a_n = [fr(1 - m)]^n a_0.$$

### **Modelo 2:** Equação Logística Discreta. [1]

Considere a equação:

$$y_{n+1} = r y_n (1 - y_n), \text{ com } r > 0.$$

Os pontos de equilíbrio  $y^*$  são dados por:

$$y^* = r y^* (1 - y^*) \Leftrightarrow y^* = r y^* - r (y^*)^2.$$

Resolvendo esta equação, obtemos:

$$y^*_1 = 0 \quad \text{e} \quad y^*_2 = 1 - \frac{1}{r}.$$

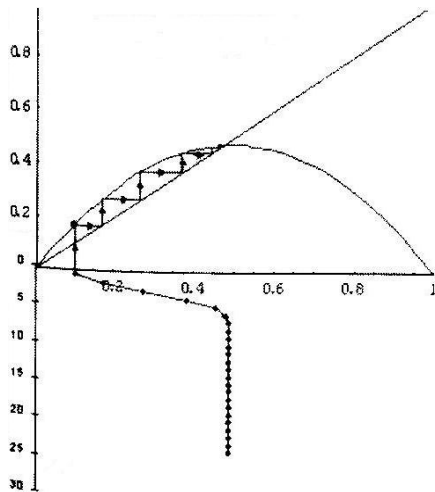
Analisando a estabilidade do modelo, temos:

$$f'(y^*_1) = f'(0) = r \quad \text{e} \quad f'(y^*_2) = f'\left(1 - \frac{1}{r}\right) = 2 - r.$$

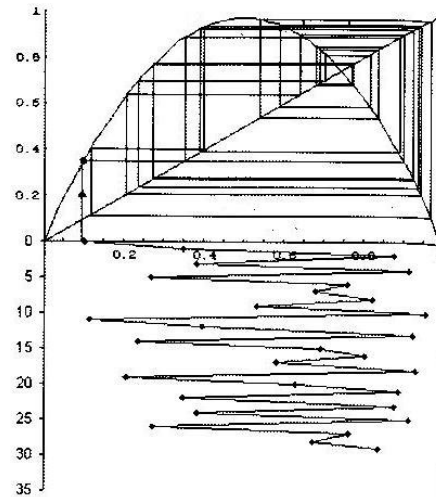
Utilizando o teorema 1, para  $0 < r < 1$  o valor de equilíbrio  $y^*_1$  é estável e para  $r > 1$  é instável. Para  $1 < r < 3$  o valor de equilíbrio  $y^*_2$  é estável e para  $r > 3$  ou  $r < 1$  ele é instável.

Se  $r = 1$ , é possível mostrar que  $y^*_1 = y^*_2 = 0$  é um centro de um ciclo limite e, se  $r = 3$ , teremos um 2-ciclo. [1,3]

Abaixo, ilustramos a estabilidade do ponto de equilíbrio  $y^*_2$  para dois casos. Na fig. 1,  $r = 1,9$ , ou seja,  $y^*_2$  é estável. Na fig. 2,  $r = 3,9$ , ou seja,  $y^*_2$  é instável. As figuras podem ser encontradas em [1] (pgs. 120 e 121).



**Figura 1:** Solução e estabilidade do ponto de equilíbrio não trivial do sistema  $y_{n+1} = 1,9y_n(1 - y_n)$



**Figura 2:** Solução e estabilidade do ponto de equilíbrio não trivial do sistema  $y_{n+1} = 3,3y_n(1 - y_n)$

### Modelo 3: Modelo Discreto de May.

O modelo geral de May considera que: “A variação da população entre duas gerações sucessivas depende do crescimento específico da população e da competição entre seus elementos.” O modelo logístico discreto é um caso particular do modelo geral de May.

Considere agora, um modelo geral discreto de dinâmica populacional:

$$N_{t+1} = N_t \exp[r(1 - N_t/K)] = N_t f(N_t).$$

Essa equação modela a população de uma espécie crescendo num meio que abrange a capacidade  $K$ . Assim, a população máxima é atingida com  $N = K$ . Analisando a função  $f(N_t)$  observamos que ela é decrescente com  $N_t$  e reflete a densidade da taxa de reprodução.

O ponto de equilíbrio  $N^*$  é obtido fazendo:

$$N^* = N^* \exp[r(1 - N^*/K)].$$

Resolvendo esta equação, temos como valores de equilíbrio:

$$N^*_1 = 0 \quad \text{e} \quad N^*_2 = K.$$

Analisando a estabilidade do modelo, temos:

$$f'(N^*_1) = f'(0) = e^r \quad \text{e} \quad f'(N^*_2) = f'(K) = 1 - r.$$

Usando o teorema 1, temos que para qualquer  $r > 0$  o valor de equilíbrio  $N^*_1$  é instável. Para  $0 < r < 2$  o valor de equilíbrio  $N^*_2$  é estável e para  $r > 2$  ele é instável.

Ao longo do projeto foram estudadas aplicações em modelos biológicos utilizando conceitos e técnicas não vistas durante o curso regular. Foi dada continuidade ao trabalho desenvolvendo estudos com equações diferenciais ordinárias e aplicações de técnicas de modelagem, o que permite uma complementação às disciplinas já cursadas.

**Referências Bibliográficas**

- [1] BASSANEZI, R. C. “Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática”. São Paulo, Ed. Contexto, 2002.
- [2] EDELSTEIN-KESHET, L. “Mathematical Models in Biology”. N. York, Random-House Ed., 1988.
- [3] SANDEFUR, J. T. “Discrete Dynamical Systems”. Oxford, Claredon, 1990.

**Bolsa:** MEC / PET